Funktionalanalytische Theorie der linearen Differenzengleichungen

Dizioglu, Bekir

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 41, 1989, S.21-38

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Funktionalanalytische Theorie der linearen Differenzengleichungen

Von **Bekir Dizioğlu,** Wolfenbüttel

(Eingegangen am 27.1.1989)

Zusammenfassung

„Funktionalanalytische Theorie der linearen Differenzengleichungen"

Eine funktionalanalytische Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung wird skizziert. Bei der Herstellung der Haupt- und allgemeinen Lösung dieser Gleichungen werden auf die weitgehenden Analogien mit den aus der Theorie der Differentialgleichungen bekannten Tatsachen hingewiesen und dies anhand eines einfachen Beispiels demonstriert.

Summary

„A functional analytical theory of linear difference equations"

A functional analytical theory of the linear difference equations of the first order is given. In deriving the fundamental and general solutions of these equations close analogies to the well-known features of the theory of differential equations are shown and these have been demonstrated by a simple example.

Der Gegenstand der Arbeit ist die Beschreibung einer funktionalanalytischen Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung:

$$c_0(z)\,F(z+h) + c_1(z)\,F(z) = \Phi(z), \tag{1}$$

in denen die auftretenden Funktionen von $z = x + iy$ in den weiter unten näher zu kennzeichnenden Bereichen der z-Ebene analytisch sein sollen. Durch die Substitution $z = h\zeta$ läßt sich in einfachster Weise erreichen, daß die im allgemeinen komplexe „Spanne" h des Veränderlichen z in die Spanne 1 der Veränderlichen ζ übergeht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit hätten wir daher auch von vornherein der Differenzengleichung die Form

$$c_0(z)\,F(z+1) + c_1(z)\,F(z) = \Phi(z) \tag{1'}$$

geben können [1], [2], [3].

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, daß $c_0(z)$ und $c_1(z)$ Konstante sind. Setzen wir mit der Verabredung, daß für $n > 0$ die Operation

$\frac{d^{-n}}{dz^{-n}}$ eine n-malige Integration bedeuten und

$\frac{d^0}{dz^0}$ $\Phi = \Phi$ sein soll, mit Konstanten C_n den Operator

$$\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \frac{d^n}{dz^n},$$

so folgt aus (1') der Konstanz von c_0 und c_1 wegen

$$c_0\theta F(z+1) + c_1\theta F(z) = \theta\Phi \tag{2}$$

oder für $\theta F(z) = G(z)$, da wegen der Kettenregel $\theta F(z+1) = G(z+1)$ ist,

$$c_0 G(z+1) + c_1 G(z) = \theta\Phi.$$

Diese einfache Feststellung gestattet bereits eine weitgehende Typisierung. Genügt z.B. Φ einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gleichwertigen Funktionalgleichung $\Theta\Phi = 0$, so folgt für $G(z)$:

$$c_0 G(z+1) + c_1 G(z) = 0$$

mit der „Hauptlösung", wie wir später sagen wollen,

$$G(z) = \text{const.} \exp\left[z \log\left(-\frac{c_1}{c_0}\right)\right] = \text{const}\left(-\frac{c_1}{c_0}\right)^z.$$

Die Hauptlösung $F(z)$ von (1') genügt daher der Funktionalgleichung $\theta F(z) = \text{const.}$

$$= \left(-\frac{c_1}{c_0}\right)^z,$$

wobei aber die in deren Lösung auftretenden verfügbaren Konstanten nicht willkürlich bleiben, sondern durch die Differenzengleichung bestimmt sind. Für $c_0 = -c_1 = 1$ ergibt sich z.B. aus

$$F(z+1) - F(z) = \cos \pi z$$

für $F(z)$, da $\cos \pi z$ der Differentialgleichung $\Phi'' + \pi^2\Phi = 0$ genügt, $F'' + \pi^2 F = \text{const.}$ oder $F(z) = C_1 \cos \pi z + C_2 \sin \pi z + \text{const.}$, und hiernach durch Eintragen in die Differenzengleichung

$$\begin{aligned} & C_1 \cos \pi(z+1) + C_2 \sin \pi(z+1) - C_1 \cos \pi z - C_2 \sin \pi z \\ = & -C_1 \cos \pi z - C_2 \sin \pi z - C_1 \cos \pi z - C_2 \sin \pi z = \cos \pi z, \end{aligned}$$

also $\quad C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = 0$. Die Hauptlösung lautet:

$$F(z) = \text{const.} - \frac{1}{2} \cos \pi z.$$

So erhält man auch, wenn Φ ein Polynom ist, als Hauptlösungen die Polynomlösungen usw., z.B. die Bernoullischen und Eulerschen Polynome, wie ich wohl nicht weiter auszuführen brauche.

Wenn auch die Menge der Funktionen Φ, für die mit einem gewissen Θ, $\theta\Phi = 0$ ist, recht ansehnlich ist, so bietet dieser triviale, leicht zu erledigende Ausnahmefall gerade für uns am wenigsten Interesse dar. Für das Folgende wollen wir nur festhalten, daß die Ausübung der Operation θ es offenbar gestattet, der rechten Seite $\Theta\Phi$ von (2) ein weitgehend beliebiges funktionentheoretisches Verhalten etwa hinsichtlich des Anwachsens längs irgend eines ins Unendliche der z-Ebene verlaufenden Strahles aufzuprägen. Wir werden später sehen, daß es für unsere Methoden lediglich notwendig ist, dieses Anwachsen in vernünftigen Grenzen zu halten, während das Verhalten von $\Theta\Phi$ außerhalb dieses Strahles weniger entscheidend ist! Der Kreis der zulässigen Funktionen ist demnach sehr groß und die Theorie sehr weitreichend. Bevor wir in die allgemeinen Erörterungen dieser Theorie eintreten, noch eine Bemerkung über die Lösung der Allgemeinen Differenzengleichung (1′)! – Die homogene Gleichung (1′) ($\Phi \equiv 0$) führen wir am besten durch Logarithmieren auf eine Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten zurück:

$$H(z+1) - H(z) = \log\left[-\frac{c_1(z)}{c_0(z)}\right],$$

wobei $H(z) = \log F(z)$ gesetzt ist. Kennen wir eine Lösung $H(z)$, so können wir (1′) leicht durch den Ansatz $F(z) = e^{H(z)} f(z)$ auf eine einfache normierte Form bringen. Da

$$c_0(z)\, e^{H(z+1)} = -c_1(z)\, e^{H(z)}$$

ist, so ergibt sich für f(z)

$$f(z+1) - f(z) = -\frac{e^{-H(z)}}{c_1(z)}\,\Phi(z)$$

oder, wenn wir die rechte Seite mit $\varphi(z)$ bezeichnen,

$$f(z+1) - f(z) = \varphi(z). \tag{3}$$

Diese normierte Form legen wir allen folgenden Betrachtungen zugrunde. Sind c_0 und c_1 konstant, so kann offenbar einfach

$$H(z) = z \log\left[-\frac{c_1}{c_0}\right]$$

gesetzt werden, wodurch auch die schon eingehender erörterten Differenzengleichungen mit allgemeinen konstanten Koeffizienten c_0 und c_1 auf die normierte Form (3) gebracht werden. Hieraus wird auch die schon benützte Tatsache ersichtlich, daß aus der Hauptlösung $F(z) = \text{const.}$ von $F(z+1) - F(z) = 0$ die Hauptlösung $G(z) = \text{const.}$

$$\exp\left[z \,.\, \log\left(-\frac{c_1}{c_0}\right)\right] = \text{const.}\left(-\frac{c_1}{c_0}\right)^z$$

von $c_0 G(z+1) + c_1 G(z) = 0$ bei konstanten c_0, c_1 folgt.

Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ zwei verschiedene Lösungen von (3), so genügt deren Differenz der zu (3) gehörigen homogenen Differenzengleichung

$$[f_1(z+1) - f_2(z+1)] - [f_1(z) - f_2(z)] = 0,$$

d.h. $f_1(z) - f_2(z)$ ist in z periodisch modulo 1, oder mit anderen Worten: Jede Lösung von (3) ist bestimmt bis auf eine additive modulo 1 perodische Funktion von z. Diese Funktion wollen wir in geeigneter Weise durch ein Variationsprinzip festlegen. Zu diesem Zweck grenzen wir als Grundgebiet G in der z-Ebene ein Rechteck ab, dessen Inneres durch die Ungleichungen $a \leq x \leq a+m$, $b \leq y \leq c$ mit beliebigen, natürlich reellen a, b, c und positivem, ganzzähligem m gekennzeichnet ist, wobei diese Zahlen der einzigen Einschränkung unterworfen sein sollen, daß in dem Grundgebiet $\varphi(z)$ analytisch sein soll. Wir fordern nun, um f(z) möglichst in Schranken zu halten, daß $|f(z) - \mathfrak{C}|$ mit einer verfügbar bleibenden komplexen Konstanten $\mathfrak{C}$ im Grundgebiet einen möglichst kleinen quadratischen Mittelwert habe, also formelmäßig:

$$\iint\limits_G [f(z) - \mathfrak{C}]\,\overline{[f(z) - \mathfrak{C}]}\,dxdy = \text{Min.!}$$

Um die Tragweite der Methode deutlich zu machen, wollen wir die Aufgabe sogleich viel allgemeiner stellen und vorübergehend von der Analytizität von f(z) und $\varphi(z)$ ganz absehen, also ganz allgemein f(z) durch $u(x,y) + iv(x,y)$ und $\varphi(z)$ durch $\sigma(x,y) + i\tau(x,y)$ ersetzen, wobei wir von u, v, σ, τ nur verlangen, daß sie nebst ihren Quadraten im Grundgebiet integrable Funktionen von x und y sein sollen. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} u(x+1,y) - u(x,y) &= \sigma(x,y) \\ v(x+1,y) - v(x,y) &= \tau(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

(alles reell!) und hierdurch sind u und v bestimmt bis auf je eine additive willkürliche Funktion, die in x periodisch modulo 1 ist. Die Extremumsbedingung lautet jetzt in der allgemeinen Fassung, wenn $\mathfrak{C} = \alpha + i\beta$ ist,

$$\iint\limits_G \{[u(x,y) - \alpha]^2 + [v(x,y) - \beta]^2\}\,dxdy = \text{Min.!} \tag{5}$$

Da der Wert dieses Integrals wohl nach unten, nicht aber nach oben beschränkt ist, so ist ein etwa vorhandenes Extremum gewiß im Minimum. Wir beschäftigen uns daher nur mit der ersten Variation des Integrals und schicken dabei noch die Bemerkung voraus, daß das Problem im Zusammenhang mit (4) offenbar erst dann sinnvoll wird, wenn $m \geq 2$ ist; denn u und v sind in dem Streifen $a \leq x < a+1$ vollständig willkürlich und werden nach Festsetzung in diesem Streifen erst durch (4) in die Nachbarstreifen fortgesetzt. Soll sich also (4) in der Lösung überhaupt auswirken, so muß das Grundgebiet G mindestens zwei solche Parallelstreifen aufweisen. Unter der Voraussetzung $m \geq 2$ ist es nun offenbar nicht angängig, in der Gleichung

$$\frac{1}{2}\,\delta \iint\limits_G = \iint\limits_G \{[u(x,y)-\alpha]\,\delta u(x,y) + [v(x,y)-\beta]\,\delta v(x,y)\}\,dxdy = 0$$

das Fundamentallemma der Variationsrechnung zur Anwendung zu bringen, den δu und δv sind wie u und v zwar in einem Streifen von der Breite 1 willkürlich, im übrigen aber periodisch in x modulo 1, also nicht willkürlich im ganzen Grundgebiet. Wir zerlegen daher das Integral der letzten Gleichung nach dem Schema

$$\iint\limits_G = \int\limits_a^{a+1}\int\limits_b^c + \int\limits_{a+1}^{a+2}\int\limits_b^c + \ldots\ldots + \int\limits_{a+m-1}^{a+m}\int\limits_b^c,$$

ersetzen in dem zweiten Integral rechter Hand x durch x+1, in dem dritten x durch x+2 usw., im m-ten x durch x+m−1, und erhalten so wegen der Periodizität von δu und δv:

$$\frac{1}{2}\,\delta \iint = \int\limits_a^{a+1}\int\limits_b^c \left\{\left[\sum_{n=0}^{m-1} u(x+n,y) - m\alpha\right]\delta u(x,y) + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{n=0}^{m-1} v(x+n,y) - m\beta\right]\delta v(x,y)\right\} dxdy = 0.$$

Da nun in jedem Punkte des Bereichs $a \leq x < a+1$, $b \leq y \leq c$, δu und δv vollständig willkürlich sind, so kann nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung diese Gleichung dann und nur dann bestehen, wenn sowohl

$$\sum_{n=0}^{m-1} u(x+n,y) - m\alpha = 0,$$

also auch

$$\sum_{n=0}^{m-1} v(x+n,y) - m\beta = 0$$

ist, oder, indem wir wieder zur komplexen Schreibweise zurückkehren, wenn

$$\sum_{n=0}^{m-1} [u(x+n,y) + iv(x+n,y)] = m\mathfrak{C} \tag{6}$$

ist. Nun ist nach (4)

$$u(x+n,y) + iv(x+n,y) = u(x,y) + iv(x,y) + S_n,$$

wobei

$$S_n = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} [\sigma(x+\varkappa,y) + i\tau(x+\varkappa,y)] \qquad (n \geq 1)$$

gesetzt ist. Tragen wir dies in (6) ein, so erhalten wir für die Lösung unseres Problems: Damit (5) im Zusammenhang mit (4) erfüllt sei, ist notwendig und, wie man bei einigem Nachdenken sofort sieht, auch hinreichend, daß in dem Streifen

$a \leq x < a+1$

$$u(x,y) + iv(x,y) = \mathfrak{C} - \frac{1}{m} \sum_{m=1}^{m-1} S_n \tag{7}$$

sei, wobei dieses $u + iv$ in die Nachbarstreifen hinein gemäß (4) fortzusetzen ist. Wir bemerken sogleich an dieser Stelle etwas, was später von Wichtigkeit sein wird, nämlich, daß y bei der getroffenen Auswahl des Grundgebietes G und des zugehörigen Variationsprinzips nur die Rolle eines nebensächlichen Parameters spielt. Wir können nämlich sehr leicht zu einem einfachen Integral übergehen, indem wir das zu extremierende Doppelintegral mit dem Faktor

$$\frac{1}{b-c}$$

versehen, c gegen b gehen lassen und dann wieder y an Stelle von b schreiben. So geht die vorstehend behandelte Aufgabe in diese einfache über:

$$\int_a^{a+m} \{[u(x,y) - \alpha]^2 + [v(x,y) - \beta]^2\}\, dx = \text{Min.!},$$

deren Lösung mit (7) übereinstimmt. Das ist auch einleuchtend, denn gilt die Lösung der letzten einfacheren Aufgabe, für $b \leq y \leq c$, so löst sie auch dieselbe Aufgabe hinsichtlich G. G wird nämlich einfach überdeckt von einem Kontinuum von Strecken $y = \text{const.}$ $(b \leq y \leq c)$ mit der Länge m, und wenn die Extremumseigenschaft von (7) für jede Strecke dieses Kontinuums gilt, so gilt sie für das ganze überdeckte Gebiet. Nichts hindert uns bei dieser Auffassung, a nicht konstant, sondern als Funktion von y $[a = a(y)]$ anzusetzen. Dieselbe Schlußweise führt dann zu der Erkenntnis, daß (7) die geforderte Minimumseigenschaft auch noch besitzt für ein verallgemeinertes Gebiet Γ, das von dem Bogen $b \leq y \leq c$ der Kurve $x = a(y)$ überstrichen wird, wenn dieser Bogen um den Betrag m parallel der x-Achse verschoben wird.

Wir kehren nun zu dem Ausgangspunkt unserer Überlegungen zurück und betrachten wieder $\sigma(x,y)$ und $\tau(x,y)$ als Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $\varphi(z)$. In dem ersten Streifen von G (oder auch Γ), gekennzeichnet durch $a \leq x < a+1$ (bzw. $a(y) \leq x < a(y)+1$), definiert dann (7) $u(x,y)$ und $v(x,y)$ ebenfalls den Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $f(z)$, die gemäß (4) in die Nachbarstreifen fortzusetzen ist. Hier kommt nun der Umstand zum Vorschein, daß wir die Konkurrenzbedingungen des Variationsproblems so weit gefaßt und nicht nur analytische Funktionen zugelassen haben. Denn setzen wir vorschriftsmäßig die Funktion (7) gemäß (4) etwa in den zweiten Streifen von G (oder Γ) fort, so erhalten wir eine Funktion f_Δ, die von der durch analytische Fortsetzung von (7) entstehenden Funktion f_A im allgemeinen verschieden, die Lösung des Problems also mit anderen Worten nicht durchgängig analytisch in G (oder Γ) ist. Um das bequem überblicken zu können, wollen wir (7) der geänderten Sachlage entsprechend in neuer Form zunächst noch einmal anschreiben

$$f(z) = \mathfrak{C} - \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1} S_n \text{ mit } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(z+k) \text{ für } a \leq x < a+1 \tag{8}$$

und hierin in der Doppelsumme

$$\sum_{n=1}^{m-1} S_n \text{ die Glieder mit gleichem } \varphi(z+k) \text{ zusammenfassen.}$$

Wir erhalten so:

$$f(z) = \mathfrak{C} - \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1} (m-n)\,\varphi(z+n-1) \qquad \text{für } a \leq x < a+1 \tag{9}$$

Bei Fortsetzung gemäß (4) in den Streifen $a+1 \leq x < a+2$ ergibt sich f_Δ nun aus (9), wie folgt:

$$f_\Delta = f(z+1) = \mathfrak{C} - \frac{m-1}{m}\varphi(z) - \frac{1}{m}\sum_{n=2}^{m-1}(m-n)\,\varphi(z+n-1) + \varphi(z)$$

$$= \mathfrak{C} + \frac{1}{m}\varphi(z) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)\,\varphi(z+k),$$

die analytische Fortsetzung hingegen ergibt einfach

$$f_A = \mathfrak{C} - \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}(m-n)\,\varphi(z+n).$$

Hiernach ist die Differenz

$$f_\Delta - f_A = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\varphi(z+n) = \frac{1}{m}S_m. \tag{10}$$

Um zu erreichen, daß $f_\Delta - f_A = 0$ werde, brauchen wir nur das bisher noch weitgehend willkürliche Grundgebiet Γ in der Weise zu erweitern, daß wir den Grenzübergang $m \to \infty$ vollziehen. Konvergiert hierbei die in (10) dann auftretende unendliche Reihe

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{n-1} \varphi(z+n)$$

oder divergiert sie nur so schwach, daß gleichwohl immer noch

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} S_m = 0 \tag{11}$$

ist, so ist, wie gewünscht, $f_\Delta - f_A = 0$. Wir nennen dann die durch diesen Grenzübergang $m\to\infty$ erhaltene Lösung (8), nämlich

$$f(z) = \mathfrak{C} - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m-1} S_n, \tag{12}$$

vorausgesetzt natürlich, daß sie in Γ existiert, die „Hauptlösung von (3)", genauer gesagt, mit Rücksicht auf die Unbestimmtheit von $\mathfrak{C}$, von der später noch die Rede sein wird, die „unbestimmte oder allgemeine" Hauptlösung von (3), doch wollen wir die Adjektiva „unbestimmt" oder „allgemein", wo keine Mißverständnisse entstehen können, unbedenklich fortlassen. Nun sehen wir sofort, daß nach bekannten elementaren Konvergenzregeln (11) eine notwendige, aber nicht einmal hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Grenzüberganges in (12) ist. Wird diese Konvergenz vorausgesetzt, so kann also die Bedingung (11), da sie selbstverständlich erfüllt sein muß, einfach weggelassen werden. Wir bemerken ferner, daß der Grenzübergang in (12) besagt, daß die etwas einfacher gebaute unendliche Reihe

$$f(z) = \mathfrak{C} - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(z+n) \tag{13}$$

durch arithmetische Mittel 1. Ordnung summiert werden soll. Konvergiert also schon der Grenzübergang in (13), so kann bekanntlich (13) bei gewöhnlicher Summierung an die Stelle von (12) treten. Im allgemeinen divergieren die in Rede stehenden Integrale, wenn Γ durch $m\to\infty$ ins Unendliche ausgedehnt wird. Offenbar ist es aber sinnvoll, auch dann noch von einer kleinsten Größe in einer Menge von Größen zu reden, wenn zwar bei einem Grenzübergang alle Größen der Menge über alle Grenzen wachsen, hierbei eine von ihnen aber immer die kleinste bleibt. Im Sinne eines solchen infinitären Minimumsprinzips läßt sich alles oben Gesagte in vollem Umfange aufrecht erhalten. Wir wollen daher den Standpunkt der Zulässigkeit solcher infinitären Prinzipien grundsätzlich einnehmen und stellen überdies fest, daß, wenn das Integral über Γ überhaupt konvergiert, diese Konvergenz nur durch die Hauptlösung erzwungen wird, und daß jede durch Überlagerung einer periodischen Funktion modulo 1 aus der Hauptlösung hervorgehende Vergleichslösung das Integral unter allen Umständen zur Divergenz bringt (also alle Vergleichswerte unendlich groß ausfallen); denn in diesem Falle muß die Differenz zwischen der Hauptlösung und $\mathfrak{C}$ im Unendlichen von Γ verschwinden, so daß sich dort nur noch die Norm der überlagerten, nicht identisch verschwindenden periodischen Funktion bemerkbar macht und das Integral zur Divergenz bringt. Ein einfaches Beispiel hierzu bildet die Ableitung der Gaußschen Ψ-Funktion

$$\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \text{ – hier ist } \mathfrak{C} = 0 \text{ –},$$

die der Differenzengleichungen

$$\Psi'(z+1) - \Psi'(z) = -\frac{1}{(z+1)^2} \text{ genügt.}$$

Hingegen besitzt die eingangs schon erwähnte Differenzengleichung $F(z+1) - F(z) = \cos \pi z$ die Hauptlösung

$$F(z) = \mathfrak{C} - \sum_{n=0}^{\infty} \cos \pi (z+n) = \mathfrak{C} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos \pi z,$$

woraus sich durch die vorgeschriebene C1-Summierung

$$F(z) = \mathfrak{C} - \frac{1}{2} \cos \pi z$$

ergibt, und diese Lösung bringt ebenso wie alle Vergleichslösungen das zum Minimum zu machende Integral zur Divergenz, liefert aber trotzdem ein „infinitäres" Minimum, das mit $m \to \infty$ über alle Grenzen wächst im Gegensatz zu der Funktion $\Psi'(z)$, bei der dieses Minimum endlich bleibt.

Nach diesen Erörterungen ergibt sich also, daß bei dem neu eingeführten „infinitären" Minimumprinzip und analytischem $\varphi(z)$ die analytischen Hauptlösungen auch dann aus der Konkurrenz hervorgehen, wenn nicht nur analytische Funktionen, sondern ganz allgemein auch nicht-analytische Lösungsfunktionen von (3) zugelassen werden, die mit ihren Quadraten in einem Querstreifen von Γ mit der Breite 1 nur integrabel zu sein brauchen.

Nun noch einige Worte über die Gestalt der Hauptlösung bei allgemeiner komplexer Spanne h! – Vergegenwärtigen wir uns noch einmal die eingangs erwähnte Transformation $z = h\zeta$, die die Spanne h von z in die Spanne 1 von ζ überführte, so sehen wir sofort, daß die Hauptlösung von

$$f(z+h) - f(z) = \varphi(z) \tag{14}$$

einfach lautet

$$F(z) = \mathfrak{C} - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(z+nh), \tag{15}$$

wobei diese Reihe durch arithmetische Mittel 1. Ordnung zu summieren ist (was wir in den betrachteten Gebieten der z-Ebene als durchführbar voraussetzen). Diese Hauptlösung (15) besitzt die erwähnte infinitäre Minimumseigenschaft offenbar in einem Gebiet Γ, das von irgend einem Kurvenbogen überstrichen wird, den man einer Parallelverschiebung in der z-Ebene bis ins Unendliche in der Richtung $0 \longrightarrow h$ unterwirft. Das ergibt sich alles so selbstverständlich aus der erwähnten Transformation, daß darauf nicht näher eingegangen zu werden braucht. Wir wollen nun noch einige wichtige Bemerkungen an (14) und (15) knüpfen. (14) ist in z und h nahezu symmetrisch. Wir werden daher mit Recht erwarten, daß eine in z analytische Lösung zugleich auch analytisch in h sein wird. Das ist nun in der Tat auch bei (15) der Fall. Das legt den einfachen Gedanken nahe, die Hauptlösung dann, wenn (15) nicht C1-summierbar sein sollte, so zu gewinnen, daß man die Spanne h zunächst einem Gebiet zuweist, in dem die Summierung gelingt und hierauf diese Lösung in jene Gebiete analytisch fortsetzt, in denen die C1-Summierung versagt. Handelt es sich z.B. um die Lösung von

$$f(z+1) - f(z) = e^{cz} \tag{16}$$

mit einer Konstanten c, deren Realteil positiv ist, so wird man sich vergeblich bemühen, die Hauptlösung aus (15) durch C1-Summierung zu gewinnen. Lösen wir aber, was nach diesem Verfahren ohne weiteres geht,

$$f(z+h) - f(z) = e^{cz}$$

mit einer Spanne h, deren Realteil negativ ist, so erhalten wir nach Summieren der einfachen geometrischen Reihe sofort die Hauptlösung

$$f(z) = \mathfrak{C} + \frac{e^{cz}}{e^{ch}-1}\cdot$$

Diese setzen wir in das Gebiet $\mathrm{Re}\, h > 0$ in selbstverständlicher Weise analytisch fest. So ergibt sich die Hauptlösung von (16)

$$f(z) = \mathfrak{C} + \frac{e^{cz}}{e^{c}-1}\cdot$$

Im allgemeinen Fall macht natürlich die analytische Fortsetzung von (15) in Divergenzgebiete hinein größere Schwierigkeiten, die man, wie üblich, dadurch aus dem Wege räumen wird, daß man auf (15) ein wirksameres Summierungsverfahren als die C1-Summierung anwendet. Für Konvergenzbereiche der C1-Summierung müssen sich natürlich die nach den verschiedenen Verfahren erhaltenen Grenzfunktionen decken und daher die infinitäre Minimumseigenschaft haben. Es ist aber auch der Fall denkbar, daß (15) für kein Gebiet (in z u n d h) C1-summierbar ist und nur wirksamere Verfahren zur Summierung von (15) führen. Dann wollen wir in vernunftgemäßer Verallgemeinerung auch die so erhaltene Funktion f(z) als Hauptlösung ansprechen. Ob diese dann noch die fundamentale, infinitäre Minimumseigenschaft, möglicherweise in verallgemeinerter Form, besitzt, ist allerdings fraglich. Das wäre noch zu untersuchen. Sei dem, wie ihm sei, wir sind durch diese Überlegungen einen guten Schritt weitergekommen, denn wir haben gesehen, daß es bei der Bildung der Hauptlösungen eigentlich darauf ankommt, daß längs des Strahles $z = ht\,(t > 0)$, längs dessen in (15) die C1-Summierung erfolgt, das Anwachsen von $\varphi(z)$ in vernünftigen Grenzen bleibt, ja, wir können noch weitergehen, indem wir den Nullpunkt der z-Ebene an die Stelle z_0 durch Parallelverschiebung verlagern, also an Stelle von (14) die Differenzengleichung

$$f(z-z_0+h)-f(z-z_0)=\varphi(z-z_0)$$

mit Hilfe von (15) zu lösen versuchen, was vielleicht bei geeigneter Wahl von z_0 für einen gewissen Bereich von h gelingt. Da die Lösung auch in z_0 analytisch ist, so kann man möglicherweise durch analytische Fortsetzung zur Stelle $z_0=0$ und damit zur Lösung der ursprünglichen Aufgabe gelangen. Das Ergebnis der Überlegung ist demnach dies, daß die C1-Summierung von (15) im allgemeinen nur möglich zu sein braucht längs irgend eines Strahles, der von irgend einem Punkt der z-Ebene in's Unendliche führt.

Es ergeben sich aber noch andere Gesichtspunkte, die den Zugang zur Hauptlösung, wenn diese nicht unmittelbar zu ermitteln sein sollte, erkennen lassen. Da die die Hauptlösung aus $\varphi(z)$ erzeugende Operation linear ist, so sind die Hauptlösungen additiv, so daß wir die Hauptlösung

$$f(z)=\mathfrak{C}-\frac{1}{2}\cos\pi z$$

der schon mehrfach erwähnten Differenzengleichung $f(z+1)-f(z)=\cos\pi z$ auch so hätten gewinnen können, daß wir die Hauptlösungen

$$f(z)=\mathfrak{C}-\frac{1}{2}e^{i\pi z} \text{ von } f(z+1)-f(z)=e^{i\pi z} \text{ und } f(z)=\mathfrak{C}-\frac{1}{2}e^{-i\pi z}$$

$$\text{von } f(z+1)-f(z)=e^{-i\pi z}, \text{ versehen mit dem Faktor } \frac{1}{2},$$

additiv zusammengefaßt hätten.

Gelingt es also z.B. $\varphi(z)$ in die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(z)$$

zu bringen und bei jeder Funktion $\psi_n(z)$ zu erreichen, daß sie jede für sich auf irgend einem der oben näher beschriebenen Strahlen – diese können alle verschieden sein – ein im Sinne von (15) vernünftiges Verhalten zeigen, so kann ebenfalls die Hauptlösung wieder durch einfaches additives Zusammenfügen der zu $c_n\psi_n(z)$ gehörigen Hauptlösungen gewonnen werden.

Weiterhin folgt aus der Additivität der Hauptlösungen, daß, wenn (15) gliedweise differenzierbar oder integrierbar sein sollte, die durch gliedweise Differentiation oder Integration entstehenden Funktionen wieder die Hauptlösungen der differenzierten bzw. integrierten Differenzengleichung (14) sind. Nun ist bei der Differentiation zu beachten, daß nach erfolgter Durchführung die in Wegfall gekommene willkürliche additive Konstante $\mathfrak{C}$ wieder hinzugefügt werden muß, und bei der Integration, daß beim Übergang zur übergeordneten, integrierten Differenzengleichung die willkürlich gebliebene Konstante in der Hauptlösung der Ausgangsgleichung auf die Integrationskonstante der (unbestimmt) integrierten Differenzengleichung einreguliert werden muß. Betrachten wir z.B. als einfaches Beispiel die Differenzengleichung $f(z+1)-$

$f(z) = nz^{n-1}$, welche das Bernoullische Polynom $B_n(z)$ zur bestimmten Hauptlösung hat, und aus der durch Differentiation die Folge von Differenzengleichungen hervorgeht:

$$f'(z+1) - f'(z) = n(n-1)\,z^{n-2}, \ldots\ldots, f^{(n-1)}(z+1) - f^{(n-1)}(z) = n!,$$
$$f^{(n)}(z+1) - f^{(n)}(z) = 0,\; f^{(n+1)}(z+1) - f^{(n+1)}(z) = 0 \text{ und so fort.}$$

Die Gleichung für die $n+1$-te Ableitung besitzt offenbar die Hauptlösung $f^{(n+1)}(z) = \mathfrak{C}_{n+1}$, aus der durch Integration $f^{(n)}(z) = \mathfrak{C}_n + \mathfrak{C}_{n+1}\,z$ folgt. Durch Eintragen in die Differenzengleichung für $f^{(n)}(z)$ sieht man oben sofort, daß $\mathfrak{C}_{n+1} = 0$ zu setzen ist, wenn man nicht zu Widersprüchen kommen will. Es ist dann also $f^{(n)}(z) = \mathfrak{C}_n$, woraus $f^{(n-1)}(z) = \mathfrak{C}_{n-1} + \mathfrak{C}_n z$ folgt; hierin ist, wie Einsetzen in die Gleichung für $f^{(n-1)}(z)$ lehrt, $\mathfrak{C}_n = n!$ zu setzen, also $f^{(n-1)}(z) = \mathfrak{C}_{n-1} + n!z$; hierin muß wiederum

$$\mathfrak{C}_{n-1} = -\frac{n!}{2}$$

gewählt werden, damit die Gleichung für $f^{(n-1)}(z)$ erfüllt sei, und so fort. Wir gelangen so schließlich bis zu einem Polynom n-ten Grades als Hauptlösung von $f(z+1) - f(z) = nz^{n-1}$, in dem alles eindeutig bestimmt ist bis auf eine additive Konstante; die Hauptlösung selbst hat, wie gesagt, die Gestalt $\mathfrak{C} + B_n(z)$ und kann, wie wir aus dem Vorstehenden ersehen, etwa durch die Vorschrift festgelegt werden, daß $\int [\mathfrak{C} + B_n(z)]\,dz$ der übergeordneten integrierten Differenzengleichung $F(z+1) - F(z) = z^n$ mit der Integrationskonstanten Null genüge. $\mathfrak{C}$ erhält hierdurch ebenfalls den Wert 0. Natürlich gibt es, wie wir nebenbei bemerken, bequemere Methoden, um zu den Bernoullischen Polynomen zu gelangen, wie etwa diese: Wir sehen sofort, daß

$$\frac{dB_n(z)}{dz} = n\,B_{n-1}(z),\; \frac{d^2B_n(z)}{dz^2} = n(n-1)\,B_{n-2}(z) \text{ usw. sein muß.}$$

In der als übergeordnete Ausgangsgleichung schon erwähnten Differenzengleichung

$$F(z+1) - F(z) = \frac{1}{n+1}\,[B_{n+1}(z+1) - B_{n+1}(z)] = z^n$$

entwickeln wir nun $B_{n+1}(z+1)$ nach dem Taylorschen Satz und erhalten

$$\frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{1!}\,B'_{n+1}(z) + \frac{1}{2!}\,B''_{n+1}(z) + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\,B^{(n+1)}_{n+1}(z)\right] = z^n$$

oder

$$B_n(z) + \frac{n}{2!}\,B_{n-1}(z) + \frac{n(n-1)}{3!}\,B_{n-2}(z) + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(n+1)!}\,B_0(z) = z^n.$$

Es ist demnach

$$B_n(z) = z^n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{\varkappa+1}\,B_{n-\varkappa}(z),$$

wobei $B_0(z) = 1$ ist. Hiernach können alle anderen $B_n(z)$ rekursiv berechnet werden.

Z.B. ist $B_1(z) = z - \frac{1}{2}$, und das ist in der Tat identisch mit $\frac{1}{n!} f^{(n-1)}(z)$

(B_1 ist ja Lösung von $B_1(z+1) - B_1(z) = 1$, $f^{(n-1)}(z)$ hingegen von $f^{(n-1)}(z+1) - f^{(n-1)}(z) = n!$).

Noch ein paar Worte über die Hauptlösungen der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten, deren Lösung wir schon eingangs auf die von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt hatten! – Wir gehen jetzt also wieder zurück auf die Ausgangsgleichung (1) und betrachten die durch Nullsetzen von $\Phi(z)$ (Homogenisieren) und Logarithmieren erhaltene Hilfsgleichung

$$\log G(z+h) - \log G(z) = \log\left[-\frac{c_1(z)}{c_0(z)}\right],$$

die für einen gewissen Bereich von h die Hauptlösung

$$\log G(z) = \log \mathfrak{C}_1 - \sum_{n=0}^{\infty} \log\left[-\frac{c_1(z+nh)}{c_0(z+nh)}\right],$$

d.h. also

$$G(z) = \mathfrak{C}_1 \prod_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{c_1(z+nh)}{c_0(z+nh)}\right] = \mathfrak{C}_1\, H(z)$$

besitzen möge. Die allgemeine Lösung erhalten wir hieraus in der Form

$$G(z) = \pi_1(z)\, H(z),$$

worin die Funktion $\pi_1(z)$, die an die Stelle von $\mathfrak{C}_1$ getreten ist, in z periodisch modulo h ist. Um die Zwangsläufigkeit der Methode deutlich hervortreten zu lassen, durch die wir jetzt zur Hauptlösung von (1) gelangen, wollen wir uns in dem folgenden Ansatz, der genau dem bei der Variation der Konstanten in der Theorie der linearen Differentialgleichungen nachgebildet ist, der allgemeinen Lösung G(z) bedienen, es sei vorzeitig spezialisiert worden und daher nicht klar, ob nicht ein allgemeiner Ansatz eine andere als die von uns im Folgenden ermittelte Hauptlösung ergeben hätte. Wir setzen also mit einer neuen zu ermittelnden Funktion f(z)

$$F(z) = G(z)\, f(z) = \pi_1(z)\, H(z)\, f(z)$$

und finden für f(z)

$$c_1(z)\, G(z)\, [f(z+h) - f(z)] = \Phi(z)$$

oder

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\Phi(z)}{c_1(z)\, G(z)} = \frac{\Phi(z)}{c_1(z)\, \pi_1(z)\, H(z)}. \tag{17}$$

Dies ist nun gerade wieder eine der von uns behandelten Differenzengleichungen in der normierten Form (3). Die Hauptlösung lautet, Konvergenz oder C1-Summierbarkeit der Reihe vorausgesetzt,

$$f(z) = \mathfrak{C}_2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi(z+nh)}{c_1(z+nh)\,\pi_1(z+nh)\,H(z+nh)}$$

oder wegen der Periodizität von $\pi_1(z)$ modulo h und der aus der Produktdarstellung von $H(z)$ folgenden Beziehung

$$H(z+nh) = \prod_{\varkappa=0}^{\infty} \left\{- \frac{c_0[z+(n+\varkappa)h]}{c_1[z+(n+\varkappa)h]}\right\} = H(z) \prod_{m=0}^{n-1} \left[- \frac{c_1(z+mh)}{c_0(z+mh)}\right]$$

$$f(z) = \mathfrak{C}_2 - \frac{1}{\pi_1(z)\,H(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{\Phi(z+nh)}{c_1(z+nh)} \prod_{m=0}^{n-1} \left[- \frac{c_1(z+mh)}{c_0(z+mh)}\right]\right\}. \tag{18}$$

Die allgemeine Lösung erhalten wir hieraus, indem wir $\mathfrak{C}_2$ durch eine allgemeine, in z modulo h periodische Funktion $\pi_2(z)$ ersetzen. Bilden wir nun aus (18) durch Multiplizieren mit $G(z) = \pi_1(z)\,H(z)$ wieder die ursprünglich gesuchte Funktion $F(z)$, so ergibt sich bei größtmöglicher Allgemeinheit aus (18), wenn wir an Stelle von $\pi_1(z)\,\pi_2(z)$ die ebenfalls in z modulo h periodische, sonst aber willkürliche Funktion $p(z)$ setzen, die allgemeinste Lösung von (1)

$$F(z) = p(z)\,H(z) - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{\Phi(z+nh)}{c_1(z+nh)} \prod_{m=0}^{n-1} \left[- \frac{c_1(z+mh)}{c_0(z+mh)}\right]\right\}. \tag{19}$$

Als Hauptlösung von (1) werden wir demnach füglich jene Lösung (19) ansprechen, in der $p(z)$ gleich einer willkürlichen Konstanten $\mathfrak{C}$ ist. Natürlich verhält sich das alles ebenso, wenn die der Einfachheit halber in den Rechnungen angeführten unendlichen Reihen und Produkte nicht konvergieren und zur Ermittlung der Hauptlösungen und Lösungen die früher eingehend erörterten wirksameren Methoden herangezogen werden müssen. In jedem Falle können wir die Vorschrift zur Gewinnung der Hauptlösung von (1) kurz und bündig so abfassen, daß hierbei nur die Hauptlösungen aller verwendeten Hilfsgleichungen herangezogen werden, und daß aus dieser Hauptlösung die allgemeine Lösung dadurch hervorgeht, daß die in der Hauptlösung auftretende willkürliche Konstante durch eine willkürliche, modulo h periodische Funktion von z ersetzt wird. Wie bei den linearen Differentialgleichungen, so stellen sich Hauptlösung und allgemeine Lösung von (1) als Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung (1) und der Haupt- bzw. allgemeinen Lösung der homogenisierten Gleichung (1) dar, wie man ja auch in bekannter Weise leicht zeigen kann, daß sich zwei verschiedene Lösungen von (1) nur um eine Lösung der homogenisierten Gleichung (1) unterscheiden können. Die Analogie mit den aus der Theorie der Differentialgleichungen bekannten Tatsachen ist sehr weitgehend. Um sie noch sinnvoller zu machen, fügen wir noch ein kurzes, durch seine Einfachheit ansprechendes Beispiel an.

Zur Lösung de Differenzengleichung

$$F(z+1) - (z+1)\,F(z) = \prod(z) \tag{20}$$

gehen wir aus von der Hauptlösung $G(z) = \mathfrak{C}_1\prod(z)$ der homogenisierten Gleichung (20), $G(z+1) - (z+1)\,G(z) = 0$, und machen unter Variation der Konstanzen den Ansatz

$$F(z) = f(z)\prod(z)$$

wonach sich für f(z) die Differenzengleichung

$$f(z+1) - f(z) = \frac{1}{z+1}$$

ergibt, die bekanntlich die Hauptlösung

$$f(z) = \mathfrak{C} + \Psi(z) = \mathfrak{C} + \frac{\prod'(z)}{\prod(z)}$$

besitzt. Die Hauptlösung von (20) lautet demnach

$$F(z) = \mathfrak{C}\prod(z) + \prod'(z),$$

die allgemeine Lösung

$$F(z) = p(z)\prod(z) + \prod'(z).$$

Damit bin ich mit meinen *allgemeinen* Ausführungen über die funktional-analytische Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung am Ende. Ich komme mit einer Randbemerkung noch einmal auf die Gaußsche $\prod$- und Ψ-Funktion zurück.

Die Gaußschen Funktionen

$$\prod(z),\ \Psi(z) = \frac{d}{dz}\log\prod(z) \text{ und } \Psi'(z)$$

genügen bekanntlich den Differenzengleichungen

$$\log\prod(z+1) - \log\prod(z) = \log(z+1);\ \Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{1}{z+1};$$

$$\Psi'(z+1) - \Psi'(z) = -\frac{1}{(z+1)^2},$$

von denen die letzte die Hauptlösung besitzt

$$\Psi'(z) = \mathfrak{C}_2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n+1)^2}.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem geschlossenen Gebiet der z-Ebene, das die Punkte $z = -(n+1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ nicht enthält. Besondere Summationsverfahren sind also nicht erforderlich. Die Konstante $\mathfrak{C}_2$ bestimmt sich aus der übergeordneten Differenzengleichung für $\Psi(z)$. Gehen wir nämlich unter Hinzufügen der bekannten Konvergenz erzeugender Mittag-Lefflerschen Summanden zu $\Psi(z)$ über, so würden wir bei allgemeinem $\mathfrak{C}_2$

$$\Psi(z) = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 z - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{n+1}\right]$$

erhalten. Setzt man dies in die Differenzengleichung für $\Psi(z)$ ein, so folgt sofort $\mathfrak{C}_2 = 0$. Es ist also

$$\Psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n+1)^2}.$$

Hier ist nun der Ort, auf ein Verfahren zur Bestimmung von $\mathfrak{C}_2$ hinzuweisen, bei dem die Einführung der Konvergenz erzeugenden Summanden überflüssig wird. Wir schreiben dazu die Differenzengleichung für $\Psi(z)$ in der Form

$$\Psi(z+1) - \Psi(z) = \int_z^{z+1} \Psi'(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{z+1}$$

und nennen

$$\int_z^{z+1} \Psi'(\zeta)\, d\zeta,$$

wie üblich, das „Spannenintegral" von $\Psi'(z)$, das natürlich bei allgemeiner Spanne h von z bis z + h zu erstrecken ist, wobei aber immer, wie man sofort sieht, der Satz gilt, daß das Spannenintegral identisch sein muß mit der rechten Seite der übergeordneten, durch Integration erhaltenen Differenzengleichung. In diesem Sonderfall ergibt sich nun: Es muß sein

$$\frac{1}{z+1} = \int_z^{z+1} \left[\mathfrak{C}_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta+n+1)^2}\right] d\zeta = \mathfrak{C}_2 + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} +$$
$$+ \ldots = \mathfrak{C}_2 + \frac{1}{z+1},$$

also $\mathfrak{C}_2 = 0$. Dies Verfahren ist sogar im allgemeinen der früher geübten Art der Konstantenbestimmung vorzuziehen und soll von uns sofort auch zur Konstantenbestimmung in der Hauptlösung für $\Psi(z)$ angewendet werden. Mit den Konvergenz erzeugenden Summanden ergibt sich für $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = \mathfrak{C}_1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{n+1}\right],$$

wobei das Spannenintegral gleich $\log(z+1)$ sein muß. Das ergibt zur Bestimmung von $\mathfrak{C}_1$

$$\log(z+1) = \int_z^{z+1} \Psi(\zeta)\, d\zeta = \mathfrak{C}_1 - \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \left[\log(\zeta+n+1) \Big|_z^{z+1} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= \mathfrak{C}_1 + \log(z+1) - \lim_{m\to\infty} \left[\log(z+m) - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\right],$$

woraus

$$\mathfrak{C}_1 = \lim_{m\to\infty} \left[\log(z+m) - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\right] = \lim_{m\to\infty} \left[\log\left(1+\frac{z}{m}\right) + \log m - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\log m - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\right] = -C$$

folgt, wobei C die Eulersche Konstante bedeutet. Demnach ist

$$\Psi(z) = -C - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{n+1}\right],$$

woraus sich, da $\prod(z)$ so normiert ist, daß $\prod(0) = 1$ wird,

$$\log \prod(z) = \int_0^z \Psi(\zeta)\, d\zeta = -Cz - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\log(\zeta+n+1) \Big|_0^z \frac{z}{n+1}\right]$$

$$= -C_z - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right]$$

ergibt. Für die ganze Transzendente $\frac{1}{\prod(z)}$ gewinnen wir hieraus die Weierstraßsche Produktentwicklung

$$\frac{1}{\prod(z)} = e^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e - \frac{z}{n},$$

von der wir durch Zusammenfassen der Konvergenz erzeugenden Exponentialfaktoren zu

$$\prod(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\exp z\left(-C + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)}{(z+1)(z+2)\ldots\ldots(z+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{(z+1)(z+2)\ldots\ldots(z+n)},$$

dem bekannten Gaußschen Produkt, gelangen.

Literatur

[1] *A. O. Gelfond,* Differenzenrechnung, Berlin 1958.
[2] *W. Hahn,* Über uneigentliche Lösungen linearer geometrischer Differenzengleichungen, Math. Ann. 125, 1952, S. 67–81.
[3] *W. Strodt,* On a class of nonlinear difference equations in the complex domain. Transact. Am. Math. So. 68, 1950, S. 132–164.